Abschnitt 3

Formale Grundlagen der Computerlinguistik

Vorbemerkung zu diesem Abschnitt

- Der folgende Abschnitt wiederholt Teile der formalen Inhalte der Vorlesung, teilweise mit leichten Variationen, Erläuterungen und Aufgaben.
- Die Folien der Übung sind dabei als Kommentar zu den Vorlesungsfolien zu verstehen.
- D.h. die Definitionen der Vorlesung gelten uneingeschränkt, die Übung dient lediglich zum vertieften Verständnis.

Unterabschnitt 1

Mengen

Grundlegendes zu Mengen

- Informal: Eine **Menge** ist eine ungeordnete Zusammenfassung mathematischer "Objekte"
- Man unterscheidet lediglich, ob ein Objekt **Element** einer Menge ist oder nicht. D.h. Mengen kennen weder eine Reihenfolge noch Mehrfachvorkommen ihrer Elemente.

$$M = \{1, a, 3\} = \{1, 3, a\} = \{1, a, 3, a\}$$

$$a \in M$$

Mengen definieren

Es gibt zwei grundlegende Arten, Mengen zu definieren:
Extensional, durch Auflistung aller Elemente:

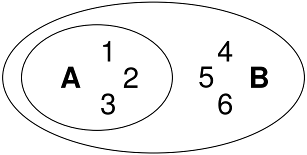
$$M_1 = \{1, a, 3\}$$

Intensional, Festlegung von Eigenschaften, die ein Element konstituieren:

$$\begin{aligned} M_2 &= \{x \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\} \\ M_2 &= \{2n \mid n \in \mathbb{N}_+\} \end{aligned}$$

Teilmengen

- Seien A und B zwei Mengen. A ist Teilmenge von B, wenn alle Element von A auch Element von B sind. Symbolisch: $A \subseteq B$



$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Mengengleichheit und echte Teilmengen

- Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn alle Elemente in A auch in B sind, d.h. wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Symbolisch: $A = B$
- Sonst sind A und B ungleich ($A \neq B$).
- A ist **echte Teilmenge** von B, wenn A eine Teilmenge von B ist, beide Mengen aber nicht gleich sind. Symbolisch: $A \subset B$.

Leere Menge und Kardinalität

- Die Leere Menge ist die Menge, die kein Element enthält. Symbolisch: $\{\}$ oder $\emptyset$
- Die Kardinalität einer Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente. Symbolisch: $|M|$. Z.B.:
  - $|\{a,b,c\}| = 3$
  - $|\{a,b,c,a\}| = ???$
  - $|\emptyset| = ???$
  - $|\{\{\}\}| = ???$

Durchschnitt und Vereinigung

Seien A und B zwei Mengen.

- Der **Durchschnitt** von A und B ist die Menge, die alle Objekte enthält, die Element beider Mengen sind. Symbolisch:

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$

- Die **Vereinigung** von A und B ist die Menge, die alle Objekte enthält, die Element mindestens einer der beiden Mengen sind. Symbolisch:

$$A \cup B := \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Aufgabe zu Durchschnitt und Vereinigung

Seinen $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{a, b, c\}$, $M_3 = \{1, 3, b\}$ und $M_4 = \{1, 2, c\}$ Mengen.

1. $M_1 \cup M_2$ = ?
2. $M_3 \cup M_4$ = ?
3. $M_1 \cap M_3$ = ?
4. $M_1 \cap M_4$ = ?
5. $M_3 \cap M_4$ = ?
6. $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ = ?
7. $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$ = ?

Verallgemeinerung von Durchschnitt und Vereinigung

Seien $M_1, M_2, M_3, ...M_n$ Mengen.

- Die **Verallgemeinerung des Durchschnitts** dieser Mengen ist die Menge, deren Elemente Element *jeder* dieser Mengen sind.

$$\bigcap_{i \in \{1,2,3,...n\}} M_i = \bigcap_{i=1}^{n} M_i := \{x | x \in M_i \text{ für alle } i \in \{1,2,3,...n\}\}$$

- Die **Verallgemeinerung der Vereinigung** dieser Mengen ist die Menge, deren Elemente Element von *mindestens* einer dieser Mengen sind.

$$\bigcup_{i \in \{1,2,3,...n\}} M_i = \bigcup_{i=1}^{n} M_i := \{x | x \in M_i \text{ für mind. ein } i \in \{1,2,3,...n\}\}$$

Potenzmenge

Sei M eine Menge.

- Die Menge aller Teilmengen von M heißt **Potenzmenge** von M.
- $\wp(M) := \{N | N \subseteq M\}$
- Statt $\wp(M)$ kann auch 2^M geschrieben werden.

Unterabschnitt 2

Relationen

Tupel

- Ein *n*-Tupel ist eine Zusammenfassung von *n* (nicht notwendigerweise unterschiedlichen) mathematischen Objekten.
- Im Gegensatz zu Mengen wird nun die Reihenfolge der Objekte beachtet.

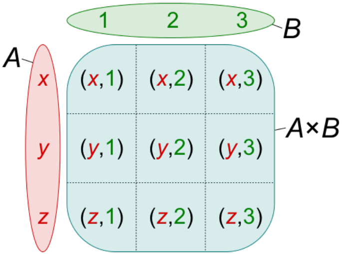
$$(1,2,3) \neq (3,2,1) \neq (3,2,1,1)$$

- Ein 2-Tupel wird oft auch *Paar* genannt.

Kartesisches Produkt

Seien M_1, M_2, ..., M_n Mengen (nicht notwendigerweise unterschiedlich).

- Informal: Ein **kartesisches Produkt** dieser Mengen ist eine Menge von n-Tupeln, wobei jede Komponente dieser Tupel immer aus einer bestimmten Menge kommt.
- Formal: $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n := \{(m_1, m_2, ..., m_n) | m_i \in M_i, 1 \leq i \leq n\}$



Bildquelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Produkt` (CC-BY-SA 3.0)

Aufgabe zum Kartesischen Produkt

$A = \{1, 2\}, B = \{\alpha, \beta\}, C = \{\triangle, \square\}$

1. $A \times B = ?$
2. $A \times C = ?$
3. $B \times C = ?$
4. $A \times B \times C = ?$
5. $A \times A = ?$

Relationen

Seien A und B Mengen.

- Eine Relation ρ zwischen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$.
- D.h. $\rho \subseteq A \times B$
- Statt $(a, b) \in \rho$ kann man auch $a\ \rho\ b$ schreiben

Relationen: Beispiel

- $M = \{Anna, Bruno, Cesar, Detlev\}$
- $liebt =$
  $\{(Anna, Bruno), (Bruno, Anna), (Cesar, Anna), (Detlev, Cesar)\}$
- *Anna liebt Bruno* bzw. $(Anna, Bruno) \in liebt$
- Aber: $(Cesar, Detlev) \notin liebt$

Aufgabe zu Relationen

Gegeben sei folgende Menge:

$$M = \{\text{Gänsebraten\_mit\_Rotkohl\_und\_Klöße}, \text{Würstchen\_mit\_Kartoffelsalat}, \text{Schweinefleisch}, \text{Rotkohl}, \text{Mayonnaise}, \text{Kartoffeln}, \text{Stärke}, \text{Eiweiß}, \text{Fett}, \text{Ballaststoffe}\}$$

Definieren sie die Relation ***beinhaltet*** $\subseteq M \times M$

Produkt von Relationen

Sei M eine Menge und seien $\rho, \sigma \in M \times M$ zwei Relationen.

- Das **Produkt** von ρ und σ ist definiert als

$$\rho\sigma := \{(x,z) \mid (x,y) \in \rho,\ (y,z) \in \sigma\}$$

- Informal handelt es sich dabei um eine Menge von Paaren, wobei die erste Komponente von einem Element aus ρ stammt und die zweite Komponente von einem Element aus σ, sodass die zweite Komponente des ρ-Elements gleich der ersten Komponente des σ-Elements ist.

Beispiele für Produkte von Relationen

$$A = \{1,2,3\},\ B = \{\alpha,\beta,\gamma\},\ C = \{\triangle,\square,\bigcirc\}$$
$$R = \{(1,\alpha),\ (2,\beta)\},\ \ S = \{(\alpha,\triangle),\ (\beta,\square),\ (\beta,\bigcirc)\}$$
$$RS = \{(1,\triangle),\ (2,\square),\ (2,\bigcirc)\}$$

$$\begin{aligned} M &= \{Anna, Bruno, Cesar\} \\ Freund &= \{(Anna, Bruno),(Bruno, Cesar)\} \\ Freund\ Freund &= \{(Anna, Cesar)\} \\ &= Freund^2 \end{aligned}$$

Reflexive und Transitive Hülle von Relationen

Sei M eine Menge und $\rho \subseteq M \times M$ eine Relation.

- Die **Diagonale** von ρ ist definiert als $\rho^0 := \{(m,m) \mid m \in M\}$
- $\rho^1 := \rho$
- $\rho^i := \rho^{i-1}\rho$ für $i > 1$
- Die **transitive Hülle** von ρ ist definiert als

$$\rho^+ := \bigcup_{i \geq 1} = \rho^1 \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots$$

- Die **reflexive und transitive Hülle** von ρ ist definiert als

$$\rho^* := \bigcup_{i \geq 0} = \rho^0 \cup \rho^1 \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots$$

Aufgabe zur Reflexiven und Transitiven Hülle von Relationen

Betrachten Sie erneut das Beispiel des Weihnachtsessen:

$$\begin{aligned} M = \{ & \text{Gänsebraten\_mit\_Rotkohl\_und\_Klöße}, \\ & \text{Würstchen\_mit\_Kartoffelsalat}, \\ & \text{Schweinefleisch,Rotkohl, Mayonnaise, Kartoffeln}, \\ & \text{Stärke, Eiweiß, Fett, Ballaststoffe} \} \end{aligned}$$

Geben Sie die transitive Hülle der ***beinhaltet***-Relation an.

Aufgabe zur Reflexiven und Transitiven Hülle von Relationen

$$M = \{a, b, c, d\}$$
$$\rho = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$
$$\rho^0 =$$
$$\rho^1 =$$
$$\rho^2 =$$
$$\rho^3 =$$
$$\rho^4 =$$