Unterabschnitt 3

Formale Sprachen

Alphabet

- Ein **Alphabet** ist eine beliebige, endliche Menge von Symbolen.
- Beispiele:
  - Die Menge aller Ziffern $\{0, 1, 2, ..., 9\}$
  - Das deutsche Alphabet $\{A, B, C, ..., a, b, c, ...$ä, ö, ü, ß$\}$
  - Eine willkürliche Auswahl von Silben $\{\text{la}, \text{le}, \text{lu}\}$
- Gegenbeispiele (warum?):
  - $\mathbb{N}$
  - Die Menge aller deutschen Wörter

Wort

Sei Σ ein Alphabet. Jede “Aneinanderreihung” beliebig vieler Symbole aus Σ heißt **Wort über** Σ. Dies beinhaltet Aneinanderreihungen von null Symbolen, das **Leerwort** (auch *leere Worte*) ε, das keine Symbole enthält. Formal:

- Das Leerwort ε ist eine Wort über Σ.
- Sei χ ein Wort über Σ und α ein Symbol aus Σ. Dann ist auch $\chi\alpha$ ein Wort über Σ.

Plushülle und Sternhülle eines Alphabets

Sei Σ ein Alphabet.

- Die **Plushülle** Σ^+ eines Alphabets Σ ist die Menge aller Wörter über Σ **ohne** ε.
- Die **Sternhülle** Σ^* eines Alphabets Σ ist die Menge aller Wörter über Σ **mit** ε.

Beispiel: Sei $\Sigma = \{a, b\}$

- $\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, ...\}$
- $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, ...\}$

Konkatenation von Wörtern

Seien $\omega = \omega_1 \omega_2 ... \omega_m$ und $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \tau_n$ Wörter über einem gemeinsamen Alphabet Σ.

- Das Wort $\omega \circ \tau := \omega\tau := \omega_1 \omega_2 ... \omega_m \tau_1 \tau_2 ... \tau_n$ heißt **Konkatenation von ω und τ.**
- "$\circ$" ist der Konkatenations-Operator (sprich "Kringel")
- Es gilt $\omega \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \omega = \omega$
- Beispiele:

$$\text{Baum} \circ \text{haus} = \text{Baumhaus}$$
$$1 \circ 1 = 11$$
$$2\times \circ 2 = 2 \times 2$$

Potenzen von Wörtern

- **Potenzen von Wörtern** verallgemeinern die Konkatenation eines Wortes ω mit sich selbst. Formal:

$$\begin{aligned} \omega^0 &:= \varepsilon \\ \omega^1 &:= \omega \\ \omega^i &:= \omega^{i-1}\omega \text{ für } i > 1 \end{aligned}$$

- Beispiel: *aab*

$$\begin{aligned} (aab)^1 &= aab \\ (aab)^2 &= (aab)^1 aab \\ &= aabaab \\ (aab)^3 &= (aab)^2 aab \\ &= (aab)^1 aabaab \\ &= aabaabaab \end{aligned}$$

Sprachen

- Eine **Sprache** $\mathscr{L}$ **über einem Alphabet** Σ ist eine beliebige Menge von Wörtern über Σ.
- Anders als Alphabete können Sprachen also unendliche Mengen sein.
- Daher gilt für jede Sprache $\mathscr{L}$ über einem Alphabet Σ, dass $\mathscr{L} \subseteq \Sigma^*$

Beispiel:

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, ...\}$
- $\mathscr{L} = \{a, aa, b, bb\}$

Potenzschreibweise für Sprachen

- Die **Potenzschreibweise** erlaubt es, Sprachen durch Konkationen und Potenzen von Wörtern über das jeweilige Alphabet darzustellen.
- Dadurch können Sprachen mit unendlichen vielen Wörtern knapp dargestellt werden.
- Beispiele:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_1 &= \{a, aa, aaa, ...\} &&= a^n, \quad n \geq 1 \\
\mathscr{L}_2 &= \{ab, aabb, aaabbb, ...\} &&= a^n b^n, \quad n \geq 1 \\
\mathscr{L}_3 &= \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, ...\} &&= a^n b^m, \quad n, m \geq 0 \\
\mathscr{L}_4 &= \{a, aab, aaabb, aaaabbb, ...\} &&= a^n b^{n-1}, \quad n \geq 1
\end{aligned}
$$

Übung zur Potenzschreibung

Geben Sie folgende Sprachen in Potenzschreibung an.

- $\{abcd, aabccd, aabbccdd, aaabcccd, ...\}$
- $\{aab, aaaabb, aaaaaabbb, \ldots\}$
- $\{ac, aabcc, aaabbccc, ...\}$

Übung zur Potenzschreibung (Lösung)

Geben Sie folgende Sprachen in Potenzschreibung an.

- $\{abcd, aabccd, aabbccdd, aaabcccd, ...\} = a^n b^m c^n d^m, \quad m, n \geq 1$
- $\{aab, aaaabb, aaaaaabbb\} = a^{2n} b^n, \quad n \geq 1$
- $\{ac, aabcc, aaabbccc, ...\} = a^n b^{n-1} c^n, \quad n \geq 1$

Konkatenation von Sprachen

Seien $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ zwei Sprachen über Σ.

- Die Konkatenation der beiden Sprache ist die Sprache über Σ, die sich durch Konkatenation der einzelnen Wörter der Sprachen ergibt. Formal:
- $\mathscr{L}_1 \circ \mathscr{L}_2 := \{\omega \circ \tau | \omega \in \mathscr{L}_1, \tau \in \mathscr{L}_2\}$
- Beispiel:

$$\{\text{weihnachts}, \text{oster}, \text{pfingst}\} \circ \{\text{gans}, \text{hase}, \text{lamm}\}$$

Potenzen von Sprachen

- Potenzen von Sprachen (Wortmengen) verallgemeinern die Konkatenation einer Sprache $\mathscr{L}$ mit sich selbst.
- Formal:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^0 &:= \{\varepsilon\} \\
\mathscr{L}^1 &:= \mathscr{L} \\
\mathscr{L}^i &:= \mathscr{L}^{i-1} \circ \mathscr{L} \text{ für } i > 1
\end{aligned}
$$

- Beispiel: Sei $L = \{schu, bi, du\}$.

$$
\begin{aligned}
L^0 &= ? \\
L^1 &= ? \\
L^2 &= ? \\
L^3 &= ?
\end{aligned}
$$

Plushülle und Sternhülle von Sprachen

Sei $\mathscr{L}$ eine Sprache.

- Die **Plushülle** dieser Sprache ist definiert durch:

$$\mathscr{L}^+ := \bigcup_{i \geq 1} \mathscr{L}^i$$

- Die **Sternhülle** dieser Sprache ist definiert durch:

$$\mathscr{L}^* := \bigcup_{i \geq 0} \mathscr{L}^i$$

Fazit: Zentrale Konzepte Formaler Sprachen

- Symbol
- Alphabet
- Wort
- Plushülle und Sternhülle eines Alphabets
- Sprache
- Potenzschreibweise für Sprachen
- Plushülle, Sternhülle einer Sprache